第27卷 第4期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 4
2010年08月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0663-06

非线性常微分方程边值问题的最优化算法*

侯祥林， 钱 颖， 吴海涛

(沈阳建筑大学理学院，沈阳 110168)

摘　要: 本文提出了一种新的优化方法以精确地解决微分方程的边值问题。针对非线性微分方程边值问题打靶法的不足，以未知的部分初始条件为设计变量，以给定的边界函数值与设计变量之间的关系，形成复杂嵌套式程式化的目标函数，建立了求解未知初始条件的优化问题，并采用 Visual Basic 6.0 语言编制了求解未知初始条件的程序，给出了典型算例，并通过比较，验证了本文求解方法的正确性。

关键词: 非线性微分方程；边值问题；优化方法；程序设计

分类号: **AMS**(2000) 34B15　　**中图分类号**: O175.8; O224　　**文献标识码**: A

1　引言

非线性常微分方程边值问题是工程中常见的理论和实际问题[1-5]，通常采用有限差分法和打靶法分析求解。目前应用最多的求解方法是打靶法[6]。无论单级和多级打靶求解方法，通过下面步骤求解：1) 选取待求的初值；2) 采用微分方程初值问题算法按步迭代计算，获得终点边界值；3) 应用计算边界值与给定真实边界值的误差函数，重新调整待求的初值，直到使得误差函数达到一定精度为止。总的看这种计算过程比较繁琐。最优化方法是能良好解决工程实际问题的数学方法[7]。笔者曾提出动态设计变量优化方法通过巧妙进行动态设计变量处理，构造目标函数，已经解决了许多工程实际问题[8-10]。本文针对非线性微分方程边值问题，提出一种以待求初值为设计变量，以误差函数构造目标函数的直接最优化算法。并通过编制最优化算法通用程序实现非线性常微分方程边值问题的精确求解。

2　微分方程边值问题的最优化算法原理与程序设计

2.1　微分方程边值问题

设任意一个 n 阶非线性常微分方程

$$y^{(n)}=f\big(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}\big), \tag{1}$$

边界条件

$$y^{(k)}(a)=y^{(k)},\quad k=i_1,i_2,\cdots,i_{n_1},\quad y^{(l)}(b)=y^{(l)},\quad l=j_1,j_2,\cdots,j_m,\cdots,j_{n_2}, \tag{2}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{n_1}$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_m,\cdots,j_{n_2}$ 为小于 n 的互异正整数，且 $n_1+n_2=n$。

收稿日期: 2009-03-11.　**作者简介**: 侯祥林 (1962年5月生)，男，博士后，教授. 研究方向：非线性系统分析与控制.

***基金项目**: 辽宁省自然科学基金 (20072011)；国家“十一五”科技支撑计划重点项目 (2008BAJ09B02-2)；辽宁省教育厅项目 (L2010445).

求解方程 (1) 边界问题的实质是寻找一种可行的方法，确定其中一个边界点的所有 y, y', y'', $\cdots, y^{(n-1)}$ 的值，使得问题成为初值问题。对于 $x=a$ 点，已知 $y^{(k)}(a)=y^{(k)}$, $k=i_1,i_2,\cdots,i_{n_1}$，n_1 个值，而 $y^{(l)}(a)$, $l=j_1,j_2,\cdots,j_m,\cdots,j_{n_2}$，$n_2$ 个值是未知的。边值问题算法将确定 $y^{(l)}(a)$, $l=j_1,j_2,\cdots,j_m,\cdots,j_{n_2}$，这 n_2 个未知量。下面将给出求法与算例。

2.2 算法原理

首先，设 $y_1=y$, $y_2=y'$, $\cdots$, $y_n=y^{(n-1)}$，将 (1) 转化为状态方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \cdots, \\ \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}), \end{cases} \tag{3}$$

边界条件转化为

$$y_k(a) = y_k, \quad k=i_1,i_2,\cdots,i_{n_1}, \quad y_l(b)=y_l, \quad l=j_1,j_2,\cdots,j_{n_2}.$$

构建最优化问题

$$\min \quad f(\boldsymbol{z}), \tag{4}$$

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{m=1}^{n_2} \left[y_{j_m}(\boldsymbol{z},b) - y_{j_m}(b)\right]^2, \tag{5}$$

设计变量 $\boldsymbol{z}=[z_1,z_2,\cdots,z_{n_2}]^T$，表示待求的初始值 $y_l(a)$, $l=j_1,j_2,\cdots,j_{n_2}$。$y_{j_m}(\boldsymbol{z},b)$, $m=1,2,\cdots,n_2$，为含有待求设计变量的复杂嵌套显式的函数。其计算借助于数值积分 Runge-Kutta[11] 算法，由程式按步迭代计算获得的边界 $x=b$ 处相应各阶函数值。这样，该问题转化为寻求待求设计变量，使目标函数获得极小值问题。其理想解条件为 $f(\boldsymbol{z})\to 0$，即 $y_l(\boldsymbol{z},b)=y_l(b)$, $l=j_1,j_2,\cdots,j_{n_2}$。因此其优化求解过程相当于求解非线性方程组 $y_{j_m}(\boldsymbol{z},b)=y_{j_m}(b)$, $m=1,2,\cdots,n_2$ 的解。

2.3 目标函数的形成程序

目标函数程式化的形成步骤为：给定自变量 x，计算步长为 h。给 $x\in[a,b]$ 分段。$h=(b-a)/M$, $x_k=a+kh$, $k=0,1,2,\cdots,M$, $x_0=a$, $x_M=b$。

1) 由已知初始条件 $y_k(a)=y_k(x_0)=y_k$, $k=1,2,\cdots,i_{n_1}$ 和待求初始条件 $y_{j_m}(x_0)=z_m$, $m=1,2,\cdots,i_{n_2}$：采用 R-K 方法进行一步计算，获得 $y_k(x_1)$, $k=1,2,\cdots,n$，它们是关于 $\boldsymbol{z}$ 的函数；

2) 由 $y_k(x_1)$, $k=1,2,\cdots,n$，计算 $y_k(x_2)$, $k=1,2,\cdots,n$，它们是关于 $\boldsymbol{z}$ 的函数；

3) 由 $y_k(x_i)$, $k=1,2,\cdots,n$，计算 $y_k(x_{i+1})$, $k=1,2,\cdots,n$，它们是关于 $\boldsymbol{z}$ 的函数；

4) 由 $y_k(x_{M-1})$, $k=1,2,\cdots,n$，计算 $y_k(x_M)$, $k=1,2,\cdots,n$；

5) 最后可以形成目标函数

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n_2} \left(y_{j_m}(\boldsymbol{z},b) - y_{j_m}(b)\right)^2.$$

2.4 坐标轮换方法概述

下面给出以二维问题为例的多维坐标轮换法优化过程计算原理，参见图1，在x_1Ox_2平面上，任取初始点$\boldsymbol{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]^T$，从$\boldsymbol{x}^{(0)}$出发，先沿$x_1$轴方向搜索，$x_2 = x_2^{(0)}$固定不变，仅改变$x_1$使目标函数值下降，由$\min\ f(x_1, x_2^{(0)})$一维搜索获得相应的最优点$\boldsymbol{x}_1^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(0)}]^T$；然后再以$\boldsymbol{x}_1^{(1)}$为起点，$x_1 = x_1^{(1)}$固定不变，仅改变$x_2$，沿$x_2$轴方向，由$\min\ f(x_1^{(1)}, x_2)$一维搜索获得相应的最优点$\boldsymbol{x}_2^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}]^T$；完成一轮搜索，进行收敛条件判定，当满足精度时，停止迭代，否则从$\boldsymbol{x}_2^1$出发进行下轮搜索计算，直到满足精度获得最优点$\boldsymbol{x}_1^* = [x_1^*, x_2^*]^T$为止。对于$n$维问题有同样的计算过程。

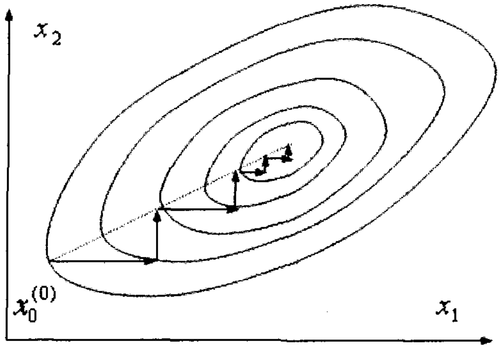

图 1:　*梯度法搜索过程示意图*

2.5　程序组成

论文采用Visual Basic编制计算程序[12]，程序模块组成含有：1) 主程序；2) 一维搜索子程序段；3) 坐标轮换法子段；4) 动态设计变量目标函数子段。

2.6　解的存在性与精度问题

1)　解的存在性问题：本文的优化方法与差分法和打靶法相比，仍属数值算法范畴，是基于微分方程边界问题的解存在为假设前提条件下的一种更为精确算法。本文不讨论微分方程边界问题解不存在的情况。

2)　步长对精度的影响：本文微分方程迭代计算过程，均采用四阶显式Runge-Kutta法，它的稳定区域为$(-2.78, 0)$，通常步长越小越稳定。在足够小步长条件下，计算误差随步骤增加而不断减小，具有稳定与相容性。将保证优化计算中获得的解具有收敛性。

3　算例分析

算例1　线性常微分方程边值问题$y'' + y = 0$，$y(0) = 0$，$y(\pi/2) = 1$。

本题为非线性常微分方程一个特例。设$y_1 = y$，$y_2 = y'$，则方程转化为$y_1' = y_2$，$y_2' = -y_1$。该题设计变量维数$n = 1$，待求变量$z_1 = y'(0) = y_2(0)$，取步长$h = \pi/2/10000$，初值$z_1(0) = 0.5$。设定黄金分割法精度为$e = 10^{-5}$，通过程序优化计算$z_1 = 0.99997$。此时目标函数精度达到$e = 10^{-10}$。本题的真实解$y(x) = \sin x$。准确值为$y'(0) = \cos 0 = 1.00000$，优化结果表明具有较高的计算精度。表1列出选取不同迭代步长h时，应用程序优化计算的设计变量结果和误差情况。可见迭代步长越小，将会导致优化计算结果的准确程度越高。

表1: 算例1中不同步长对于优化结果的影响

h	优化计算的 z_1^*	误差百分比	h	优化计算的 z_1^*	误差百分比
$\pi/2/10000$	0.99997	0.003	$\pi/2/100$	0.99658	0.342
$\pi/2/1000$	0.99965	0.035	$\pi/2/10$	0.96635	3.365

算例2 含一个未知量的非线性常微分方程边值问题

$$y^{''}-(1+x^2)y=1,\quad y(0)=1,\quad y(1)=3.$$

设 $y_1=y$, $y_2=y^{'}$，则方程转化为 $y_1^{'}=y_2$, $y_2^{'}=1+(1+x^2)y_1$。

本题设计变量维数为 $n=1$，此时 $z_1=y^{'}(0)=y_2(0)$。取步长为 $h=0.0001$，设目标函数精度为 $e=10^{-5}$，初值 $z_1(0)=0.5$，程序优化计算得 $z_1=0.6419$，即 $y^{'}(0)=0.6419$。以此初值，应用R-K方法计算，列出 x 间隔为0.01-0.05的精确解，见表2。图2为优化计算后初值所确定的函数和导数随坐标变化过程。

表2: 算例2中应用优化后初值所计算的函数值

x	y	$y^{'}$	x	y	$y^{'}$	x	y	$y^{'}$	x	y	$y^{'}$
0.00	1	0.6419	0.10	1.0743	0.8458	0.55	1.6916	1.9799	0.93	2.7284	3.657
0.01	1.0065	0.6619	⋯	⋯	⋯	0.60	1.7947	2.1459	0.94	2.7653	3.7184
0.02	1.0132	0.682	0.15	1.1192	0.9515	0.65	1.9064	2.3245	0.95	2.8028	3.7811
0.03	1.0202	0.7022	0.20	1.1695	1.0604	0.70	2.0274	2.5177	0.96	2.8409	3.8451
0.04	1.0273	0.7224	0.25	1.2253	1.1733	0.75	2.1584	2.7273	0.97	2.8797	3.9103
0.05	1.0346	0.7428	0.30	1.2869	1.2909	0.80	2.3004	2.9557	0.98	2.9191	3.9769
0.06	1.0421	0.7632	0.35	1.3545	1.4139	0.85	2.4544	3.2055	0.99	2.9592	4.0448
0.07	1.0499	0.7837	0.40	1.4284	1.5432	0.90	2.6214	3.4795	1.00	3.0000	4.1141
0.08	1.0578	0.8043	0.45	1.5089	1.6799	0.91	2.6565	3.5375			
0.09	1.066	0.825	0.50	1.5965	1.8250	0.92	2.6921	3.5967			

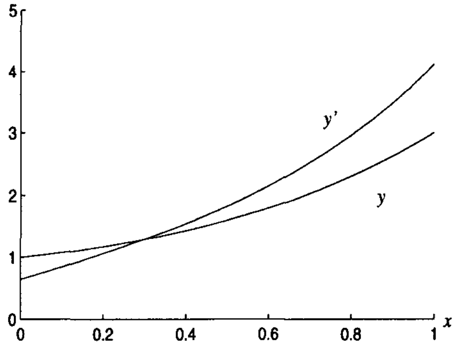

图2: 优化计算后初值所确定的函数和导数随坐标的变化过程

算例3 Duffing方程$y'' + y + 0.5y^3 = 0$。

首先以初始条件$y(0) = 1$，$y'(0) = 2$，按步长为$h = 0.0001$，以R-K算法直接计算出$x = 1$时，$y(1) = 1.4524$，$y'(1) = -1.4243$。形成含二个未知量的非线性常微分方程边值问题$y'' + y + 0.5y^3 = 0$，边值条件$y(1) = 1.4524$，$y'(1) = -1.4243$，用优化算法反求$y(0)$和$y'(0)$。本题设计变量为$n = 2$。设$y(0) = z_1$，$y'(0) = z_2$，步长仍取为$h = 0.0001$，任取$z_1^0 = 0.5$，$z_2^0 = 0.5$，黄金分割法精度为$e = 10^{-5}$，多维目标函数精度为$e = 10^{-10}$。应用优化程序分析，经过17轮$\times 2 = 34$次优化计算，目标函数达到设定精度。得$z_1^* = 0.9999$，$z_2^* = 1.9990$，结果对真实初值具有非常高的逼近精度，表明方法有效。将优化过程中设计变量和目标函数的变化过程列在表3。

表3: 算例3优化求解过程

优化次数	z_1	z_2	opf	优化次数	z_1	z_2	opf
0	0.5	0.5	2.0134656620	18	1.0012	1.9963	0.0000030899
2	1.2116	1.6028	0.0963231334	20	1.0006	1.9975	0.0000009047
4	1.0944	1.8133	0.0174709276	22	1.0003	1.9982	0.0000003382
6	1.0475	1.903	0.0042758058	24	1.0001	1.9986	0.0000000665
8	1.0254	1.9474	0.0011996556	26	1.0000	1.9987	0.0000000259
10	1.0138	1.9705	0.0003526104	28	1.0000	1.9988	0.0000000090
12	1.0077	1.9835	0.0001110789	30	1.0000	1.9989	0.0000000032
14	1.0042	1.9903	0.0000337805	32	0.9999	1.9989	0.0000000011
16	1.0023	1.9942	0.0000101650	34	0.9999	1.9990	0.0000000001

4 结论

本文基于优化原理，提出了非线性常微分方程边值问题的直接优化算法。编制边值问题的通用的求解程序。真实地分析求解了待求未知量为1个和2个的线性和非线性常微分方程边值问题的算例。精确的计算结果，表明论文所提出算法求解这类问题的可行性。为进一步理论研究与工程应用提供良好条件。

参考文献：

[1] 蔡遂林. 常微分方程[M]. 杭州：浙江大学出版社，2008
Cai S L. Ordinary Differential Equation[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2008

[2] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京：科学出版社，2007
Ge W G. Boundary Value Problems in Nonlinear Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2007

[3] 王文霞. 一类二阶非线性积分一微分方程的边值问题[J]. 工程数学学报，2005, 22(3): 555-558
Wang W X. Boundary value problems for second-order nonlinear integro-differential equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(3): 555-558

[4] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Math Anal Appl, 1992, 168: 540-551

[5] Gupta C P, Trofimchuk S I. Solvability of multi-point boundary value problem and related a priori estimates[J]. Canad Appl Math Quart, 1998, 6(1): 45-60
[6] 凌复华等. 常微分方程数值方法及其在力学中的应用[M]. 重庆：重庆大学出版社，1990
Ling F H, *et al*. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations & its Application in Dynamics[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1990
[7] 郭科，陈聆，魏友华. 最优化方法及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2007
Guo K, Chen L, Wei Y H. Optimization Method and its Application[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007
[8] 侯祥林，戴丽. 旋转倒立双摆摆起控制量的动态设计变量优化[J]. 应用力学学报，2005, 22(3): 404-408
Hou X L, Dai L. Dynamic design variable optimization of swing-up control about rotating double-inverted pendulum[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2005, 22(3): 404-408
[9] 侯祥林，陈长征，虞和济等. 神经网络权值和阈值的优化方法[J]. 东北大学学报，1999, 20(4): 447-450
Hou X L, Chen C Z, Yu H J, *et al*. Optimum method about weights and thresholds of neural network[J]. Northeastern University Journals, 1999, 20(4): 447-450
[10] 侯祥林，李和玉，刘杰. 最大值最小化问题优化算法与多自由度动力减振器参数计算[J]. 振动与冲击，2008, 27(1): 100-103
Hou X L, Li H Y, Liu J. Optimal algorithm for minimization of maximum value problems and application of dynamic absorbor with multi-dof[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(1): 100-103
[11] 李庆扬，王能超，易大义. 数值分析[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2006
Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical Analysis[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2006
[12] 林卓然. VB 语言程序设计[M]. 北京：电子工业出版社，2003
Lin Z R. VB Programming Languagep[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003

Optimization Algorithm of Boundary Value Problem for Nonlinear Ordinary Differential Equations

HOU Xiang-lin, QIAN Ying, WU Hai-tao

(School of Science, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168)

Abstract: In this paper, an optimization method is applied to accurately solve a boundary value problem of ordinary differential equations. In view of the weakness of the shooting method, this study treats the initial conditions of the unknown parts as design variables and conducts complicated objective function based on the relationship between the given boundary values and design variables. And therefore, a new optimization algorithm to compute initial conditions of unknown parts is proposed, which is finally verified by employing Visual Basic 6.0 to design a universe program, providing typical examples and making comparison with the existent results.
Keywords: nonlinear ordinary differential; boundary value problem; optimization algorithm; program design

Received: 11 Mar 2009. **Accepted:** 22 Oct 2009.
Foundation item: The Nature Science Foundation of Liaoning Province (20072011); the National 'eleven-five' Science & Technology Research Program (2008BAJ09B02-2); the Education Department Project of Liaoning Province (L2010445).